Varianta 91

Subiectul I.

a) $\left|\sin 1 - i\cos 1\right| = 1$

b) $\frac{11\sqrt{14}}{7}$.

c) $\vec{v}\cdot\vec{w} = 3$.

d) $\sin 1 > \cos 1 \iff tg\,1 > 1 \iff tg\,1 > tg\,\frac{\pi}{4}$, adevărat.

e) $V_{OBCD} = 3$.

f) $a = -64$ şi $b = 0$.

Subiectul II.

1.

a) $\log_3 4 > \log_3 3 = 1 = \log_4 4 > \log_4 3$.

b) Probabilitatea căutată este $p = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

c) $g(5) = 1$.

d) $x = 0$.

e) $\sqrt{110} \approx 10{,}4$

2.

a) $f'(x) = 2^x \cdot \ln 2 - 1,\ \forall x \in \mathbf{R}$.

b) $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{\ln 2} - \frac{3}{2}$.

c) $f''(x) > 0,\ \forall x \in \mathbf{R}$, deci funcția f este convexă pe $\mathbf{R}$.

d) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = 2\cdot\ln 2 - 1$.

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln 2$.

Subiectul III.

a) Calcul direct.

b) Se folosesc relațiile lui Viète:

c) x_1 rădăcină a lui $f \iff x_1^3 + ax_1^2 + bx_1 + c = 0 \Rightarrow x_1^{n+3} + a\cdot x_1^{n+2} + b\cdot x_1^{n+1} + c\cdot x_1^n = 0$.

Analog obținem $x_2^{n+3} + a\cdot x_2^{n+2} + b\cdot x_2^{n+1} + c\cdot x_2^n = 0$ şi $x_3^{n+3} + a\cdot x_3^{n+2} + b\cdot x_3^{n+1} + c\cdot x_3^n = 0$.

Adunând ultimele trei egalități rezultă $S_{n+3} + aS_{n+2} + bS_{n+1} + cS_n = 0,\ \forall n \in \mathbf{N}$.

d) $S_3 - a^3 + 3ab - 3c$, iar $S_4 = a^4 - 4a^2b + 4ac + 2b^2$.

e) Se verifică prin calcul direct.

f) $\Delta = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & b \\ S_1 & S_2 & -3c \\ b & -3c & b^2 - 2ac \end{vmatrix} = a^2b^2 - 4a^3c - 4b^3 + 18abc - 27c^2$.

g) "$\Rightarrow$" Considerăm $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}$. Atunci $\det(A) \in \mathbf{R}$, deci $(\det(A))^2 \geq 0$.

Mai mult, $\Delta = \det(A \cdot A^T) = \det(A) \cdot \det(A^T) = (\det(A))^2 \geq 0$.

"$\Leftarrow$" Avem $\Delta = (\det(A))^2 \overset{a)}{=} ((x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2))^2 \overset{ip}{\geq} 0$ (1)

Presupunem că f nu are toate rădăcinile reale.

Atunci, rădăcinile sale sunt de forma $\begin{cases} x_1 = -2d - a \\ x_2 = d + e \cdot i \\ x_3 = d - e \cdot i \end{cases}$, cu $d, e \in \mathbf{R}$, $e \neq 0$

iar (1) $\Leftrightarrow$ $-4e^2\left((3d - a)^2 + e^2\right)^2 \geq 0$, fals.

Subiectul IV.

a) $f'(x) = a \cdot x^{a-1}$, $\forall\, x > 0$.

b) Funcția f este funcție Rolle pe fiecare dintre intervalele $[17, 19]$ şi $[1974, 1976]$ şi conform teoremei lui Lagrange, există $c(a) \in (17, 19)$ şi $d(a) \in (1974, 1976)$, astfel încât $\dfrac{f(19) - f(17)}{19 - 17} = f'(c(a))$ şi $\dfrac{f(1976) - f(1974)}{1976 - 1974} = f'(d(a))$.

c) Ecuația din enunț are soluțiile $x = 0$ şi $x = 1$.

Pentru $x > 1$, avem $(g(x))^{x-1} < 19^{x-1} < 1974^{x-1} < (h(x))^{x-1}$, deci nu există soluții, iar pentru $x < 1$, rezultă analog că nu avem soluții.

d) Pentru $x \in \mathbf{R}$ şi funcția $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(t) = t^x$, din **b)** deducem că există $c(x) \in (17, 19)$ şi $d(x) \in (1974, 1976)$, astfel încât $19^x - 17^x = 2x(c(x))^{x-1}$ şi $1976^x - 1974^x = 2x(d(x))^{x-1}$.

Ecuația din enunț devine: $2x(c(x))^{x-1} = 2x(d(x))^{x-1}$ şi din **c)** obținem că singurele soluții ale ecuației (3) sunt $x = 0$ şi $x = 1$.

e) Se demonstrează prin calcul direct, ridicând la pătrat inegalitatea, sau alegând $x = \dfrac{1}{2}$ şi raționând ca la demonstrația punctului **c)**.

f) Din **b)** deducem că pentru $x \in [0, 1]$ avem $19^x + 1974^x \geq 17^x + 1976^x$ şi integrând această inegalitate pe intervalul $[0, 1]$ obținem concluzia.

g) Pentru $x \in [1, 2]$, obținem $19^x + 1974^x \leq 17^x + 1976^x$, şi integrând această inegalitate pe intervalul $[1, 2]$ deducem concluzia.